Свойства степеней.

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; $a^x : a^y = a^{x-y}$;

$(a^x)^y = a^{xy}$; $(ab)^x = a^x b^x$; $a^0 = 1$;

$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \left(\frac{b}{a}\right)^x$; $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

Свойства арифметических корней.

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$; $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b \neq 0)$;

$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$; $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[kn]{a}$; $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$;

$(\sqrt[n]{a})^n = a$ $(a \geq 0)$;

$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a \text{ при } a \geq 0, \\ -a \text{ при } a < 0; \end{cases}$ $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$;

$\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$.

Прогрессии.

Арифметическая:

$a_n = a_1 + d(n-1)$; $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $n \geq 2$;

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$;

$a_k + a_m = a_p + a_q$, где $k + m = p + q$.

Геометрическая:

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$; $|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$, $n \geq 2$;

$b_k \cdot b_m = b_p \cdot b_q$, где $k + m = p + q$;

$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$.

Если $|q| < 1$ и $n \to \infty$, то $S = \frac{b_1}{1-q}$.

Формулы преобразования многочленов.

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$;

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Квадратный трехчлен.

$ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Координаты вершины:

$x_B = -\frac{b}{2a}$, $y_B = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 - корни квадратного трехчлена.

Теорема Виета: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$

Чтобы корни квадратного трехчлена были >0:

$\begin{cases} D = b^2 - 4ac \geq 0, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0, \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0. \end{cases}$

Чтобы корни квадратного трехчлена были <0:

$\begin{cases} D = b^2 - 4ac \geq 0, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0, \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0. \end{cases}$

Чтобы корни квадратного трехчлена имели разные знаки: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0$.

Функции и графики.

Область определения функции:

1) знаменатель $\neq 0$;

2) $y = \sqrt[2n]{f(x)} \Rightarrow f(x) \geq 0$

3) $y = \log_{g(x)} f(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \end{cases}$

Если $f(-x) = f(x)$, то функция называется **четной**. График симметричен относительно оси *Oy*.

Если $f(-x) = -f(x)$, то функция называется **нечетной**. График симметричен относительно начала координат.

Если $y = f(x)$ периодическая с периодом *T*, то функция $y = f(kx)$ также периодическая с периодом $T/|k|$.

Иррациональные уравнения.

Основная ошибка – посторонние корни. Решают методами замены или разложением на множители или возведением обеих частей в степень. При возведении в четную степень возможно появление посторонних корней.

1) $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$

2) Уравнение $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$, равносильно системе $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x); \end{cases}$ или $\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$

Показательные уравнения.

$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

Также решают методами замены или разложением на множители. Необходимо учесть, что $a^{f(x)} > 0$.

Логарифмические уравнения.

$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$

$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$

Также решают методами замены или разложением на множители, только необходимо учесть ОДЗ:

$\log_a f(x) \Rightarrow f(x) > 0$.

Рациональные неравенства.

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0$ $(<, \leq, \geq)$ решают методом интервалов.

1) Все переносят в одну сторону и приводят к общему знаменателю.
2) Числитель $= 0$, знаменатель $\neq 0$.
3) На числовой оси отмечают корни числителя и знаменателя и проверяют знаки на каждом интервале.

Иррациональные неравенства.

Решают методом интервалов аналогично рациональным неравенствам, только необходимо учесть ОДЗ

$\left(\sqrt[2n]{f(x)} \Rightarrow f(x) \geq 0\right)$.

Показательные неравенства.

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$

$a > 1$, то $f(x) > g(x)$; $0 < a < 1$, то $f(x) < g(x)$.

Также можно применять метод интервалов.

Логарифмические неравенства.

$\log_a f(x) > \log_a g(x)$

$a > 1$, то $\begin{cases} f(x) > g(x); \\ g(x) > 0 \end{cases}$ $0 < a < 1$, то $\begin{cases} f(x) < g(x). \\ f(x) > 0 \end{cases}$

Также можно применять метод интервалов, только необходимо учесть ОДЗ $\left(\log_a f(x) \Rightarrow f(x) > 0\right)$.

Уравнения с модулями.

1) $|f(x)| = a$

если $a < 0$, то решений нет;

если $a = 0$, то $f(x) = 0$;

если $a > 0$, то $f(x) = a$ или $f(x) = -a$.

2) $|f(x)| = |g(x)|$ равносильно уравнениям

$f(x) = g(x)$, $f(x) = -g(x)$.

3) $|f(x)| = g(x)$ равносильно совокупности систем

а) $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} f(x) = -g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

4) $|f_1(x)| + |f_2(x)| + \ldots + |f_n(x)| = g(x)$

а) находят значения *x*, при которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль;

б) разбивают область допустимых значений *x* на промежутки, на каждом из которых выражения под знаком модуля сохраняют знак;

в) раскрывают все модули на каждом из найденных промежутков и решают полученные уравнения.

Неравенства с модулями.

1) $|f(x)| < a$, если $a > 0$ равносильно системе неравенств

$-a < f(x) < a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < a, \\ f(x) > -a. \end{cases}$

2) $|f(x)| > a$, если $a > 0$ равносильно двум неравенствам

$f(x) > a$ или $f(x) < -a$.

3) $|f(x)| < |g(x)|$ или $|f(x)| > |g(x)|$, решаются возведением обеих частей в квадрат.

4) $|f(x)| < g(x)$ равносильно системе неравенств

$-g(x) < f(x) < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$

5) $|f(x)| > g(x)$ равносильно двум неравенствам

$f(x) > g(x)$ или $f(x) < -g(x)$.

Все остальные неравенства с модулями решаются методом интервалов.

Показательная функция.

$y = a^x$, $a > 0,\ a \neq 1,\ x \in R,\ y \in (0;+\infty)$.

Логарифмическая функция.

$y = \log_a x,\ \ a > 0,\ a \neq 1,\ x \in (0;+\infty),\ \ y \in R$.

Если $a > 1$, то показательная и логарифмическая функции возрастают, если $0 < a < 1$, то функции убывают.

Свойства логарифмов.

1) $a^{\log_a b} = b$. 2) $\log_a 1 = 0$. 3) $\log_a a = 1$.

4) $\log_c a + \log_c b = \log_c (ab)$.

5) $\log_c a - \log_c b = \log_c (a/b)$.

6) $\log_a b^p = p \log_a b$. 7) $\log_{a^p} b = \dfrac{1}{p} \log_a b$.

8) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, $c > 0,\ c \neq 1$.

9) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ или $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

10) $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$.

11) $\log_a b \cdot \log_c d = \log_a d \cdot \log_c b$.

Формулы дифференцирования.

1) $(c)' = 0$. 2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ 3) $(e^x)' = e^x$.

4) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$. 5) $(a^x)' = a^x \ln a$. 6) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

7) $(\sin x)' = \cos x$. 8) $(\cos x)' = -\sin x$.

9) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. 10) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Правила дифференцирования.

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$ 2) $(uv)' = u'v + uv'$

3) $(cu)' = cu'$ 4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Геометрический смысл производной: $f'(x_0) = k = \operatorname{tg}\alpha$,
где k – угловой коэффициент касательной;
α – угол наклона касательной.

Уравнение касательной: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Механический смысл производной: Пусть $S = S(t)$ – уравнение зависимости пути от времени. Тогда $S'(t)$ – скорость движения, а $S''(t)$ – ускорение.

Тригонометрия.

Функция	Аргумент α: 0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–
$\operatorname{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–	0

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$

$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

Формулы сложения.

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$; $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha}$; $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}$

Формулы двойного аргумента.

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$, $\operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$

Формулы половинного аргумента.

$\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{2}$; $\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 + \cos\alpha}{2}$

$\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$; $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$

Формулы преобразования произведения в сумму.

$\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big)$

$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\big)$

$\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\big(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\big)$

Формулы преобразования суммы в произведение.

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

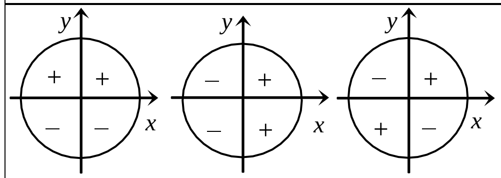
$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$, $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$, $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$

Соотношение между $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ **и** $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

$\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, $\cos\alpha = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$



Знаки синуса *Знаки косинуса* *Знаки тангенса и котангенса*

Простейшие тригонометрические уравнения.

$\sin x = a,\ a \in [-1;1] \Rightarrow x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in z$

$\cos x = a,\ a \in [-1;1] \Rightarrow x = \pm\arccos a + 2\pi k,\ k \in z$

$\operatorname{tg} x = a,\ a \in R \Rightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in z$

$\operatorname{ctg} x = a,\ a \in R \Rightarrow x = \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k \in z$

Частные случаи.

$\sin x = 0;\ \ x = \pi k;$ $\cos x = 0;\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k;$

$\sin x = 1;\ \ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k;$ $\cos x = 1;\ x = 2\pi k;$

$\sin x = -1;\ x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k;$ $\cos x = -1;\ x = \pi + 2\pi k.$

$\sin(-x) = -\sin x;$ $\cos(-x) = \cos x;$

$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x;$ $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x.$

$\arcsin(-x) = -\arcsin x;$ $\arccos(-x) = \pi - \arccos x;$

$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x;$ $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x.$

Планиметрия.

Формулы площадей треугольника.

$S = \dfrac{1}{2} a h_a$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = \dfrac{1}{2} ab\sin C$ $S = \dfrac{abc}{4R}$ $S = pr$

где h_a – высота, опущенная на сторону a;
R – радиус описанной окружности;
r – радиус вписанной окружности;
p – полупериметр треугольника

$\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$ **(теорема синусов)**;

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ **(теорема косинусов)**

Площадь четырехугольника: $S = \dfrac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$

Формулы площадей параллелограмма.

$S = ah_a = bh_b$ $S = ab\sin\alpha$

Площадь трапеции: $S = \dfrac{a+b}{2} h$

Длина окружности: $L = 2\pi R$

Площадь круга: $S = \pi R^2$

Стереометрия.

Призма.

Площадь боковой поверхности: $S_{\text{б.п.}} = pl$

где p – периметр перпендикулярного сечения;
l – длина бокового ребра.

Объем: $V = S \cdot H$

Пирамида.

Объем: $V = \dfrac{1}{3} S H$

Цилиндр.

Площадь боковой поверхности $S_{\text{б.п.}} = 2\pi RH$

Объем: $V = \pi R^2 H$

Конус.

Площадь боковой поверхности $S_{\text{б.п.}} = \pi RL$

Объем: $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H$

Сфера и шар.

Площадь поверхности шара: $S = 4\pi R^2$

Объем: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$